

Algèbre 1 Exercices – Feuille 1

Exercice 1. Écrire les tables de tous les groupes à 2, 3 et 4 éléments.

Exercice 2. Écrire les tables de tous les groupes à 5 et 6 éléments.

Exercice 3.

- (1) Soit G un groupe tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$. Montrer que G est abélien.
- (2) Montrer que, si G est fini, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 4. On considère sur \mathbb{R} la loi de composition définie par $x * y = x + y - xy$.

- (1) Cette loi, est-elle associative, commutative ?
- (2) Admet-elle un élément neutre ? Si oui, est-ce que tout élément de \mathbb{R} admet un inverse ?

Exercice 5. Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $*$ la loi dans G définie par

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y).$$

- (1) Montrer que $(G, *)$ est un groupe non abélien.
- (2) Montrer que $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de G .

Exercice 6. On pose

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ et } ad - bc = 1 \right\}.$$

Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles à coefficients dans \mathbb{R} .