Examen - Correction

Question 1

Soit
$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}\right).$$

1. $D_f = [-1; 1]$. La fonction f est continue car c'est une composée des fonctions continues.
2. Posons $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$. Le $DL_2(0)$ de $(1+x)^\alpha$ est
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2).$$
Le $DL_2(0)$ de $g(x)$ est donc
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\left((1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2+o(x^2)\right)+\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2+o(x^2)\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$
3. Le $DL_2(0)$ de $\ln(1+x)$ est
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
Le $DL_2(0)$ de $f(x)$ est donc
$$f(x) = \ln(g(x)) = \ln(1-\frac{x^2}{8}) = -\frac{x^2}{8} + o(x^2).$$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = -\frac{1}{8}$.

Question 2

1. $\displaystyle\int x^3 + e^{2x} + \sqrt{5x}\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{2\sqrt{5}}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$
2. $\dfrac{1}{x^2-9} = \dfrac{1}{(x-3)(x+3)}$.
On cherche a et b tels que $\dfrac{1}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{x+3}$. On trouve $a = \dfrac{1}{6}$ et $b = -\dfrac{1}{6}$.
Donc
$$\int \frac{1}{x^2-9}\,dx = \int \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+3}\,dx = \frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + C.$$

3.
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2-2x+1+2x-1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int (x-1)+2+\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int x+1+\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

4. On effectue l'integration par partie avec $u=\ln(x)$ et $v'=x^5$. On a donc $u'=\frac{1}{x}$ et $v=\frac{x^6}{6}$.
$$\int x^5\ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6}\ln(x) - \int \frac{x^6}{6}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6}\ln(x) - \frac{1}{6}\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6}\ln(x) - \frac{x^6}{36} + C.$$

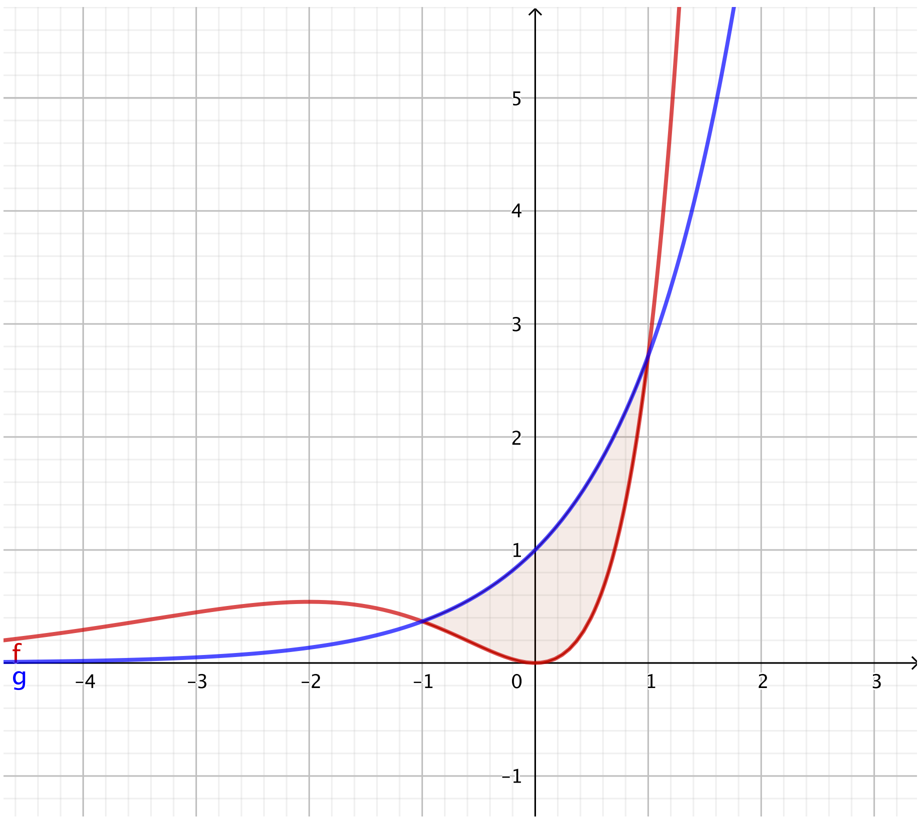
Question 3

On considère $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$ et $g(x)=\mathrm{e}^x$.

1. $D_f=\mathbf{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

x		-2		0	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$\frac{4}{\mathrm{e}^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

2. $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$.



3. L'aire comprise entre les deux courbes est :

$$S = \int_{-1}^{1} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x - x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Calculons $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ par intégration par partie avec $u = x^2$ et $v' = \mathrm{e}^x$. On obtient

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2\left(x\mathrm{e}^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\right) = x^2\mathrm{e}^x - 2(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x) \\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

Donc

$$\int \mathrm{e}^x - x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x - \int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x - (x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x) = -\mathrm{e}^x(x-1)^2.$$

Par conséquent,

$$S = \int_{-1}^{1} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x - x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^x(x-1)^2\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{\mathrm{e}}.$$